CAPITULO II

VARIABLES ALEATORIAS.

DEFINICION.- UNA VARIABLE ALEATORIA ES UNA FUNCION DE LOS VALORES DEL ESPACIO MUESTRAL. ESTO ES, EL DOMINIO DE DEFINICION DE UNA VARIABLE ALEATORIA ES UN ESPACIO MUESTRAL, Y SU RANGO O RECORRIDO ES UN CONJUNTO DE NUMEROS REALES.

LAS VARIABLES ALEATORIAS LAS PODEMOS REPRESENTAR: X (w), DONDE w REPRESENTA UN ELEMENTO GENERICO DEL ESPACIO MUESTRAL, O SIMPLEMENTE x.

EJEMPLO :

EXPERIMENTO : SE TIRA UN PAR DE DADOS

RESULTADO : LA SUMA DE LAS CARAS

EL ESPACIO MUESTRAL ES :

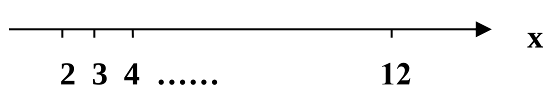
$$S = \{ (x_1, x_2) \mid x_1 = 1, 2, \ldots\ldots, 6 \; ; \; x_2 = 1, 2, \ldots., 6 \}$$

SEA LA VARIABLE ALEATORIA x, QUE REPRESENTA LA SUMA DE LOS NUMEROS QUE APARECEN :

$$x = x_1 + x_2$$

ENTONCES EL RANGO DE X ES :

$$R_x = \{ 2, 3, 4, \ldots.., 12 \}$$



$$\text{VARIABLES ALEATORIAS} \begin{cases} \text{DISCRETAS} \\ \text{CONTINUAS} \end{cases}$$
v.a.

UNA VARIABLE ALEATORIA (v.a.) SE LLAMA DISCRETA SI SU RECORRIDO ES UN CONJUNTO DE NUMEROS REALES, O BIEN SI SU DOMINIO DE DEFINICION ES DISCRETO.

UNA VARIABLE ALEATORIA (v.a.) SE LLAMA CONTINUA, SI ESTA DEFINIDA PARA TODOS LOS VALORES REALES DENTRO DE UN INTERVALO.

AL RECORRIDO DE UNA VARIABLE ALEATORIA (v.a.) TAMBIEN SE LE CONOCE O LLAMA ESPECTRO.

DEFINICION .- SE LLAMA DISTRIBUCION DE UNA VARIABLE ALEATORIA (v.a.) A UNA ASIGNACION DE POBABILIDADES DE SU ESPECTRO.

SI SE CONOCE LA PROBABILIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA (v.a.), ENTONCES AL CONJUNTO DE PAREJAS (xi, Pi), DONDE Xi ES EL i-ÉSIMO ELEMENTO DEL ESPECTRO Y Pi, SU PROBABILIDAD, SE LE LLAMA DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD DE LA VARIABLE ALEATORIA.

EN EL EJEMPLO ANTERIOR :

EL ESPECTRO DE x ES :
ESPECTRO = { 2, 3, 4, …..,12 }

P (x = 2) =1/36 ; (2, 1/36) [LA PAREJA (1,1)]
P (x = 3) = 2/36 , (3, 2/36) [LAS PAREJAS (1,2) Y (2,1)]

-
-
-

DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD DE v.a.

FUNCION DE PROBABILIDAD.- LA FUNCION DE PROBABILIDAD DE LA VARIABLE ALEATORIA (v.a.) DISCRETA x, SE REPRESENTA :

P (x)

Y SE DEFINE :

P (x) = P (X (w) = x)

DONDE P(X(w) = x) ES LA PROBABILIDAD DE LOS ELEMENTOS DEL ESPECTRO.

CONTINUANDO CON EL EJEMPLO ANTERIOR:

P (x = 4) = 3/36
P (x = 5) = 4/36
P (x = 6) = 5/36
P (x = 7) = 6/36
P (x = 8) = 5/36
P (x = 9) = 4/36
P (x = 10) = 3/36
P (x = 11) = 2/36
P (x = 12) = 1/36

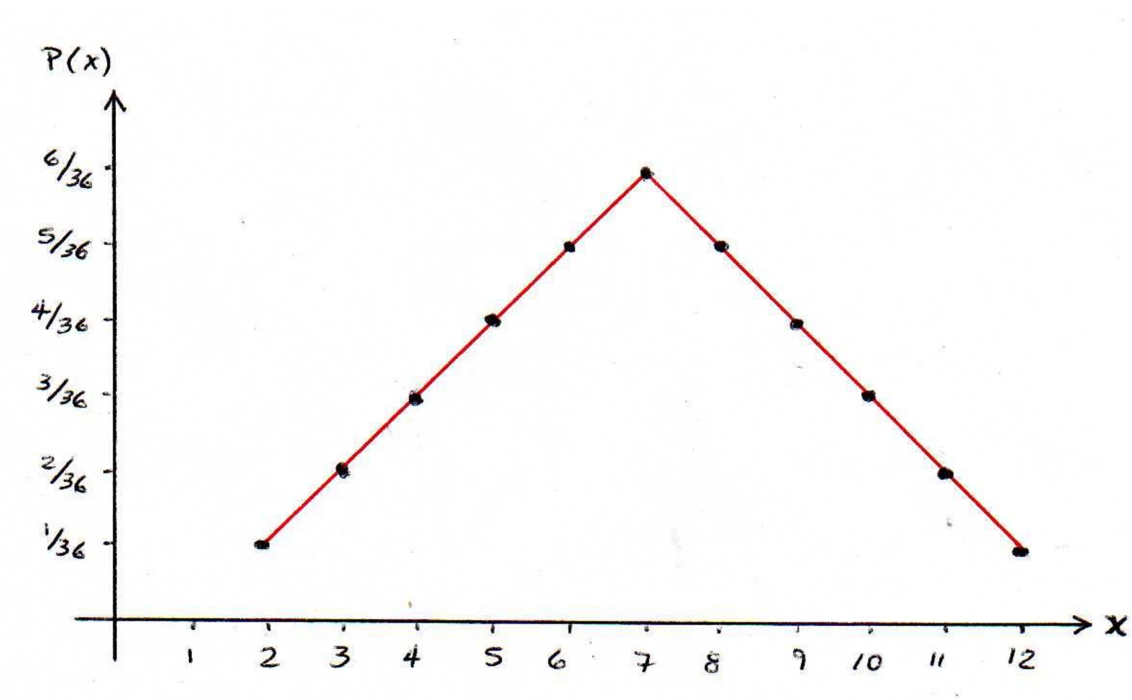
$$\sum P(x) = 1$$

$$P(x) > O \; ; \; \forall \; x$$

LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD LA PODEMOS REPRESENTAR:
A) EN FORMA TABULAR :

x_i	$P(x_i)$
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

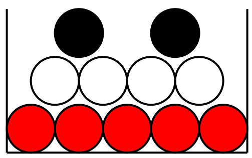
B) GRAFICAMENTE :



C) POR MEDIO DE LA FUNCION DE PROBABILIDAD DE X :

$$P(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{36} & ; \quad x = 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\[2ex] \dfrac{13-x}{36} & ; \quad x = 8, 9, 10, 11, 12 \end{cases}$$

EJEMPLO :



5 ROJAS
4 BLANCAS
2 NEGRAS

SE EXTRAEN 3 BOLAS SUCESIVAMENTE Y SIN REMPLAZO.
SI LA V.A. X REPRESENTA EL NUMERO DE BOLAS ROJAS QUE SE EXTRAEN. DETERMINAR LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD.

ESPECTRO = { 0, 1, 2, 3 }

$P(x = 0) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = (6/11)(5/10)(4/9) = 0.121$

$P(x = 1) = P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) =$

$= (5/11)(6/10)(5/9) + (6/11)(5/10)(5/9) + (6/11)(5/10)(5/9) = 0.455$

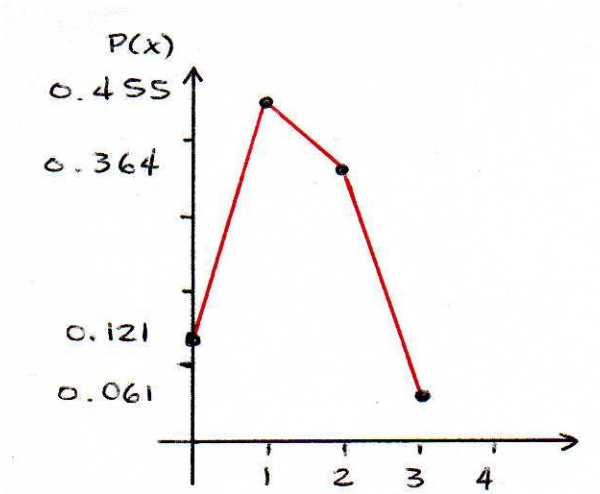
$P(x = 2) = P(A_1 A_2 \bar{A}_3) + P(A_1 \bar{A}_2 A_3) + P(\bar{A}_1 A_2 A_3) =$

$= (5/11)(4/10)(6/9) + (5/11)(6/10)(4/9) + (6/11)(5/10)(4/9) = 0.3636364$

$P(x = 3) = P(A_1 A_2 A_3) = (5/11)(4/10)(3/9) = 0.0606061$

A_n: SALE LA BOLA ROJA EN LA N-ESIMA EXTRACCION.

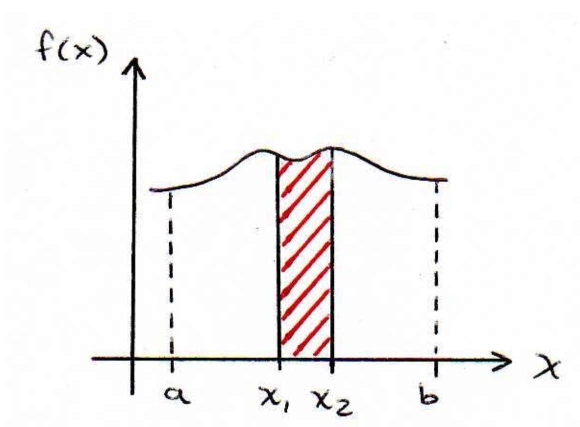
X_i	$P(X_i)$
0	0.121
1	0.455
2	0.364
3	0.061



SI X ES UNA VARIABLE ALEATORIA (V.A.) CONTINUA a ≤ x ≤ b ENTONCES. LA FUNCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD SE REPRESENTA:

f(x)

Y SE DETERMINA DE TAL MANERA QUE P($x_1 \le x \le x_2$) SEA IGUAL AL AREA BAJO LA CURVA QUE DEFINE f(x) ENTRE x_1 Y x_2:



ESTO ES:

$$P(x_1 \le x \le x_2) = \int_{x1}^{x2} f(x)\,dx$$

f(x) ≥ 0 ; ∀ x

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1$$

EJEMPLO.- DEMOSTRAR QUE $f(x) = 3x^2$ ES UNA FUNCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE LA VARIABLES ALEATORIA (V.A) X EN EL INTERVALO $0 \le x \le 1$, Y CALCULAR $P(0.5 \le x \le 0.7)$

$$f(x) = 3x^2 \ge 0 \qquad ; \qquad 0 \le x \le 1$$

$$\int_0^1 3x^2\,dx = x^3 \Big| = 1$$

$$P(0.5 \le x \le 0.7) = \int_{0.5}^{0.7} 3x^2 dx = x^3 \Big| = 0.128$$

<u>FUNCION DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD ACUMULADA</u>

SE REPRESENTA POR F(x) PARA LA VARIABLE ALEATORIA x Y SE DEFINE:

$$F(x) = P(x \le x_c)$$

O SEA, ES LA PROBABILIDAD DE QUE LA V,A x TOME VALORES MENORES O IGUALES A x_c.

PARA V.A. DISCRETAS

$$F(X) = P(x \le x_c) = \sum_{xi=a}^{xc} P(x_i) \quad ; x_c \le b$$

DONDE $a \le x \le b$

EJEMPLO:

EXPERIMENTO: SE LANZA UN DADO. X REPRESENTA EL NUMERO DEL DADO.

ESPECTRO = { 1, 2, 3, 4, 5, 6)

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

LA FUNCION DE RPOBABILIDAD ES ESTE EJERCICIO ES:

$$P(x) = 1/6 \quad ; \quad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$F(x = 3) = P(x \leq 3) = \sum_{x=1}^{3} P(x) = P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) =$$

$$= 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = 0.5 = 50\%$$

EJEMPLO:

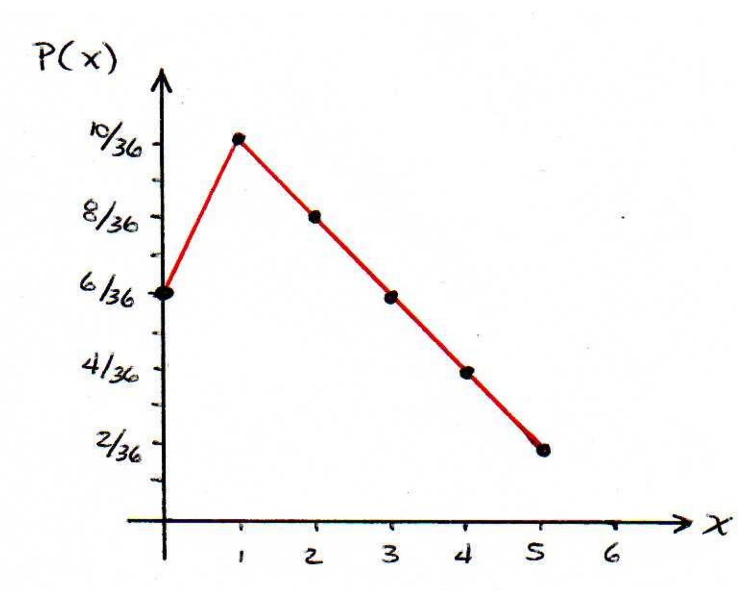
EXPERIMENTO: SE LANZAN DOS DADOS.

EL RESULTADO AL CUAL SE ASOCIA LA VARIABLE ALEATORIA x ES LA DIFERENCIA ENTRE EL MAYOR Y MENOR VALOR DE LAS CARAS. DEFINIR LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD ACUMULADA.

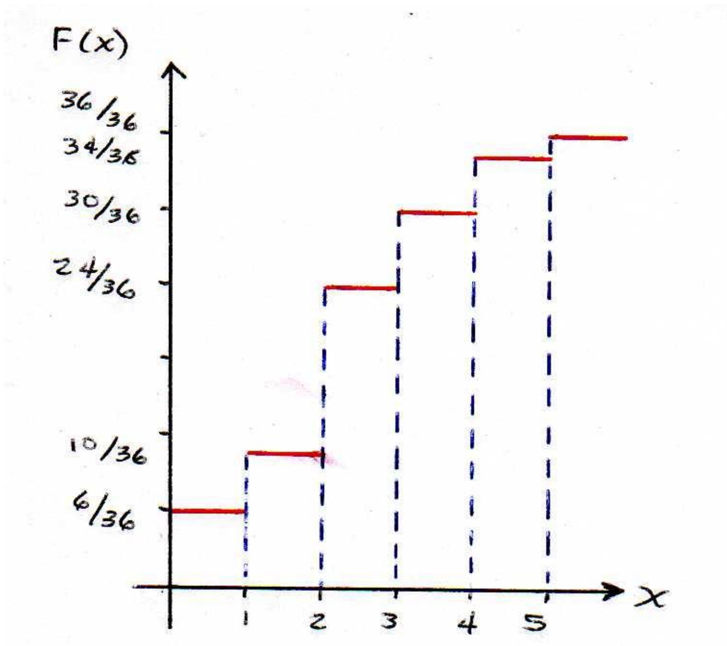
ESPECTRO = $\{0,1,2,3,4,5\}$

COMO LA VARIABLE ALEATORIA x ES DISCRETA

x_i	0	1	2	3	4	5	$\sum$
$P(x_i)$	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36	36/36=1



x	0	1	2	3	4	5
F(x)	6/36	16/36	24/36	30/36	34/36	36/36 = 1



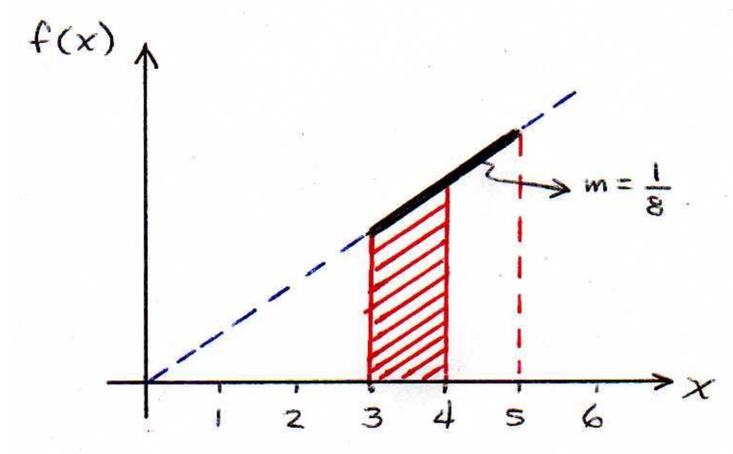
EJEMPLO:

f(x) = kx ; 3 < x < 5

$$\int_3^5 kxdx = 1 \quad \Rightarrow k = 1/8$$

F(x = 4) = ¿?

$$F(x = 4) = \int_3^4 1/8\,xdx = 1/16\, x^2 \Big|_3^4 = 1/16\,(16 - 9) = 7/16$$



ESPERANZA MATEMATICA

SI x ES UNA VARIABLE ALEATORIA. SEA h(x) UNA FUNCIÓN CUALQUIERA CUYO DOMINIO SON TODOS LOS VALORES DE LA VARIABLE ALEATORIA x, SE DEFINE COMO ESPERANZA MATEMATICA DE h(x) :

$$E\{h(x)\} = \begin{cases} \sum_{\forall x} h(x)P(x) \; ; & \textbf{SI x ES DISCRETA} \\ \int_a^b h(x) f(x) dx \; ; & \textbf{SI x ES CONTINUA} \end{cases}$$

EJEMPLO:

EXPERIMENTO: SE LANZA UN DADO.

X : REPRESENTA EL NUMERO DE LA CARA DEL DADO.

E $\{x\}$ **= ¿? ; ESPECTRO =** $\{1,2,3,4,5,6\}$ **; P(x) = 1/6**

E $\{x\}$ **=** $\sum_{\forall x} xP(x)$ **= (1)(1/6) + (2)(1/6) + (3)(1/6) + (4)(1/6) + (5)(1/6) + (6)(1/6) = 21/6**

E $\{x\}$ **= 3.5**

PROPIEDADES

I. E $\{k\}$ **= k**

DEMOSTRACIÓN :

$$\mathbf{E}\{k\} = \int_a^b kf(x)dx = \mathbf{k}\int_a^b f(x)dx = \mathbf{k}$$

II. $\mathbf{E}\{kh(x)\} = \mathbf{k}\,\mathbf{E}\{h(x)\}$

DEMOSTRACIÓN :

CONSIDERANDO QUE x ES UNA VARIABLE ALEATORIA CONTÍNUA :

$$\mathbf{E}\{kh(x)\} = \int_a^b kh(x)f(x)dx = \mathbf{k}\int_a^b h(x)f(x)dx = \mathbf{k}\,\mathbf{E}\{h(x)\}$$

III. $\mathbf{E}\{h1(x)+h2(x)\} = \mathbf{E}\{h1(x)\} + \mathbf{E}\{h2(x)\}$

DEMOSTRACIÓN :

$$\mathbf{E}\{h1(x)+h2(x)\} = \int_a^b h1(x)F(x)dx + \int_a^b h2(x)F(x)dx = \mathbf{E}\{h1(x)\} + \mathbf{E}\{h2(x)\}$$

MOMENTOS DE ORDEN n CON RESPECTO AL ORIGEN

ES LA ESPERANZA MATEMÁTICA DE h(x) = x^n, Y QUE SE REPRESENTA μ_n', ESTO ES:

$$\mu_n' = \begin{cases} E(x^n) = \sum_{\forall x} x^n P(x); & \text{PARA x DISCRETA} \\ E(x^n) = \int_a^b x^n f(x)\,dx; & \text{PARA x CONTINUA} \end{cases}$$

SI n = 0 :

$$\mu_0' = E(x^0) = \sum_{\forall x} x^0 P(x) = \sum_{\forall x} P(x) = 1$$

SI n = 1 :

$$\mu_1' = E(x) = \sum_{\forall x} xP(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{MEDIA DE LA DISTRIBUCIÓN}}}{\mu_x}$$

EJEMPLO :

SE TIRAN TRES DADOS, NO CARGADOS, Y SE PERMITE QUE EL APOSTADOR APUESTE "y" CANTIDAD DE DINERO A LA OCURRENCIA DE UNO DE LOS ENTEROS 1, 2, 3, 4, 5 Y 6. SI POR EJEMPLO SE APUESTA UN DÓLAR A LA OCURRENCIA DE UN 4, SI CAE UN 4 SE GANA UN DÓLAR, SI CAEN DOS 4 SE GANAN DOS DOLARES, Y SI CAEN TRES 4 SE GANAN TRES DOLARES, PERO SI NO CAEN NINGUN 4 SE PIERDE UN DÓLAR. SI SE APUESTA UN DÓLAR A LA OCURRENCIA DEL UNO (1) Y SI x REPRESENTA LA CANTIDAD QUE SE GANA, CALCULAR LA MEDIA DE x.

μ_x **= ¿?** ; **E** $\{x\}$ **= ¿?**

x : REPRESENTA LA CANTIDAD QUE SE GANA

ESPECTRO DE x = $\{-1,1,2,3\}$

P(x = -1) = (5/6)(5/6)(5/6) = 125/216

P(x = 1) = (1/6)(5/6)(5/6) + (5/6)(1/6)(5/6) + (5/6)(5/6)(1/6) = 75/216

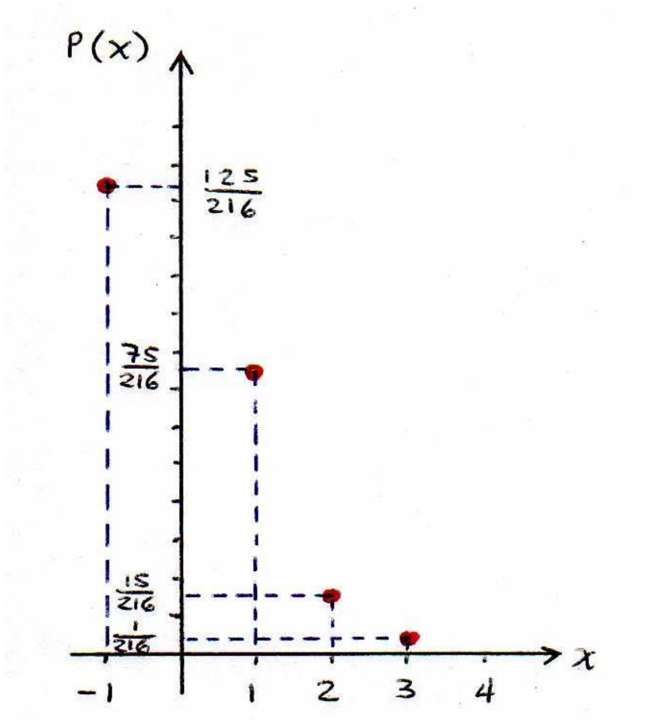
P (x = 2) = (1/6)(1/6)(5/6) + (1/6)(5/6)(1/6) + (5/6)(1/6)(1/6) = 15/216

P (x = 3) = (1/6)(1/6)(1/6) = 1/216

x	**-1**	**1**	**2**	**3**	$\sum$
P(x)	**125/216**	**75/216**	**15/216**	**1/216**	**216/216 = 1**

$\mu_x = \sum_{\forall x} xP(x)$ = (-1)(125/216) + (1)(75/216) + (2)(15/216) + (3)(1/216) = -17/216 =

μ_x = <u>-0.079</u>



PROBLEMA:

UN MEDICO ORDENA A UNA PERSONA SEGUIR UNA DIETA DURANTE CUATRO SEMANAS. DE ACUERDO A LAS CARACTERÍSTICAS DE LA PERSONA EL DOCTOR |ESTABLECE UNA FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD f(x) DEL PESO PERDIDO Y CONSIDERANDO QUE ESTE COMPRENDIDO ENTRE 5 Y 10 KG. DETERMINAR EL PESO DE QUE LA PERSONA ESPERA PERDER SI:

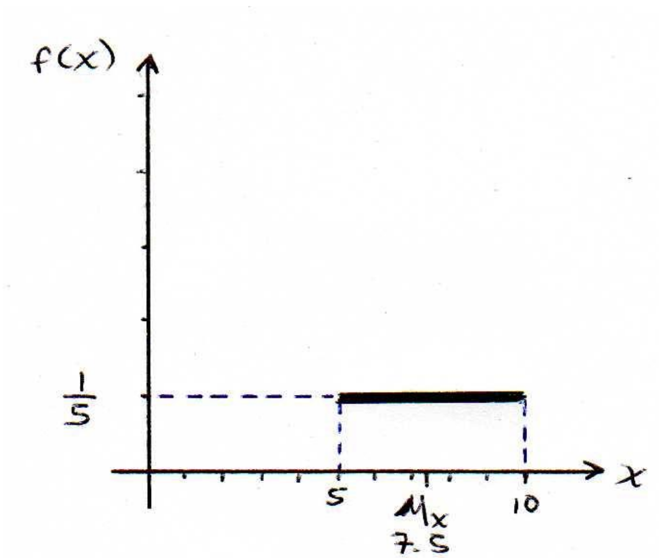
a) **$f(x) = 1/5$; $5 \le x \le 10$**
b) **$f(x) = 3/125\,(x-5)^2$ $5 \le x \le 10$**

DONDE LA VARIABLE x REPRESENTA EL PESOPERDIDO

SOLUCIÓN:

E(x) = ¿? ; x : ES UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

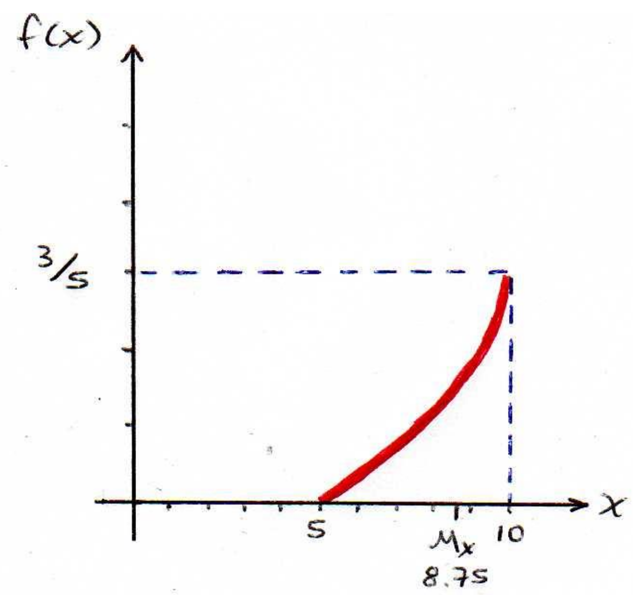
a) $E(x) = \int_5^{10} x f(x)\,dx = \int_5^{10} x(1/5)\,dx = 1/10\, x^2 \Big|_5^{10} = 1/10(100-25) = \underline{7.5}$



b) $E(x) = \int_{5}^{10} 3/125(x-5)^2 \, x \, dx = 3/125 \int_{5}^{10} (x^3 - 10x^2 + 25x) \, dx =$

$$3/125 \left(x^4/4 - 10x^3/3 + 25x^2/2\right)\Big|_{5}^{10} = \underline{8.75}$$

$$(x-5)^2 = (x-5)(x-5) = x^2 - 10x + 25$$



MOMENTOS DE ORDEN n CON RESPECTO A LA MEDIA.

SE LLAMA MOMENTO DE ORDEN n CON RESPECTO A LA MEDIA DE LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE LA VARIABLE ALEATORIA x, A LA ESPERANZA MATEMÁTICA DE LA FUNCIÓN $h(x) = (x - \mu_x)^n$ Y SE REPRESENTA μ_n

$$\mu_n = E((x - \mu_x)^n) = \begin{cases} \sum_{\forall} (x - \mu_x)^n P(x) \\ \int_a^b (x - \mu_x)^n f(x)\,dx \end{cases}$$

n = 0

$$\mu_0 = E((x - \mu_x)^0) = \int_a^b (x - \mu_x)^0 f(x)\,dx = 1$$

n = 1

$$\mu_1 = E((x - \mu_x)) = \int_a^b (x - \mu_x) f(x)\,dx = \int_a^b x f(x)\,dx - \int_a^b \mu_x f(x)\,dx =$$

$$= \mu_x - \mu_x \int_a^b f(x)\,dx = 0$$

n = 2

$$\mu_2 = E((x - \mu_x)^2) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{VARIANCIA}}}{\sigma^2}$$

$$\mu_2 = E((x - \mu_x)^2) = E((x^2 - 2x\mu_x + \mu_x^2)) = E(x^2) - 2E(x\mu_x) + E(\mu_x^2) =$$
$$= E(x^2) - 2\mu_x E(x) + E(\mu_x^2) = E(x^2) - 2\mu_x^2 + \mu_x^2 E(1) = E(x^2) - 2\mu_x^2 + \mu_x^2$$

$$\sigma^2 = E(x^2) - \mu_x^2$$

PARAMETROS DE LAS DISTRIBUCIONES EMPIRICAS

Se tiene una muestra de tamaño grande específicamente cuando el número de resultados es considerable, es más conveniente trabajar con **intervalos de clase**. La amplitud de todos estos intervalos se llama **rango** y el punto medio de cada intervalo de clase se llama **marca de clase**.

El arreglo en una tabla de los intervalos de una clase, frecuencia, frecuencias relativas y frecuencias relativas acumuladas de llama **tabla de frecuencias**.

Ejemplo:

En una muestra de 25 varillas se obtuvieron las siguientes medidas: 13.02, 12.94, 12.99, 13.07, 12.91, 12.93, 13.06, 13.04, 13.05, 12.93, 12.97, 12.98, 13.10, 13.06, 12.97, 12.99, 12.90, 13.05, 12.98, 13.00, 12.96, 13.01, 12.98, 12.96, 13.03.

INTERVALO DE CLASE	MARCA DE CLASE ($\tilde{x}$)	f_i	f_i^*	F_i
12.895 – 12.937	12.916	4	4 / 25	4 / 25 = 16%
12.937 – 12.979	12.958	5	5 / 25	9 / 25 = 36%
12.979 – 13.021	13	8	8 / 25	17 / 25 = 68%
13.021 – 13.063	13.042	6	6 / 25	23 / 25 = 92%
13.063 – 13.105	13.084	2	2 / 25	25 / 25 = 100%

Valor máximo = 13.10

Valor mínimo = 12.90

$\sum f_i = 25$

Como la muestra son con dos cifras decimales, la fracción que se suma y resta, se considera tres decimales con un múltiplo del tamaño de la muestra que es 25, por lo tanto para este ejemplo es 0.005

Valor máximo + 0.005 = 13.10 + 0.005 = 13.105

Valor mínimo – 0.005 = 12.90 – 0.005 = 12.895

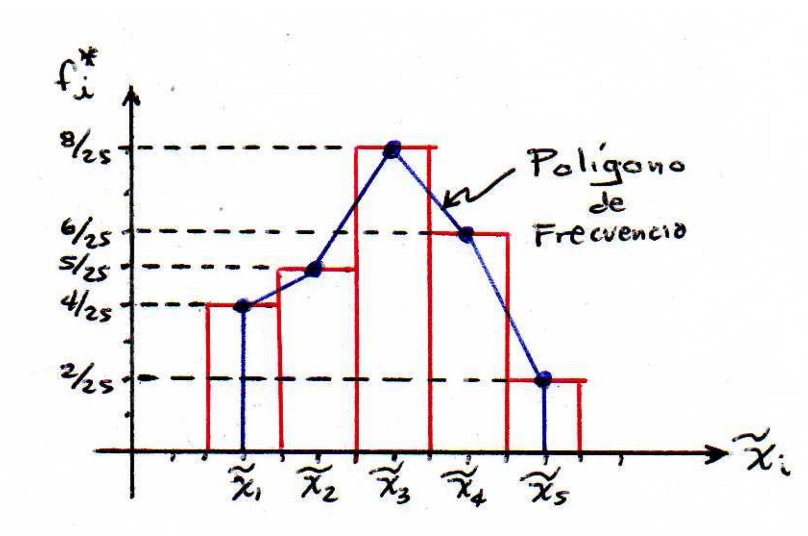
Rango = 13.105 – 12.895 = 0.21

Amplitud del Intervalo = 0.21 / 5 = 0.042

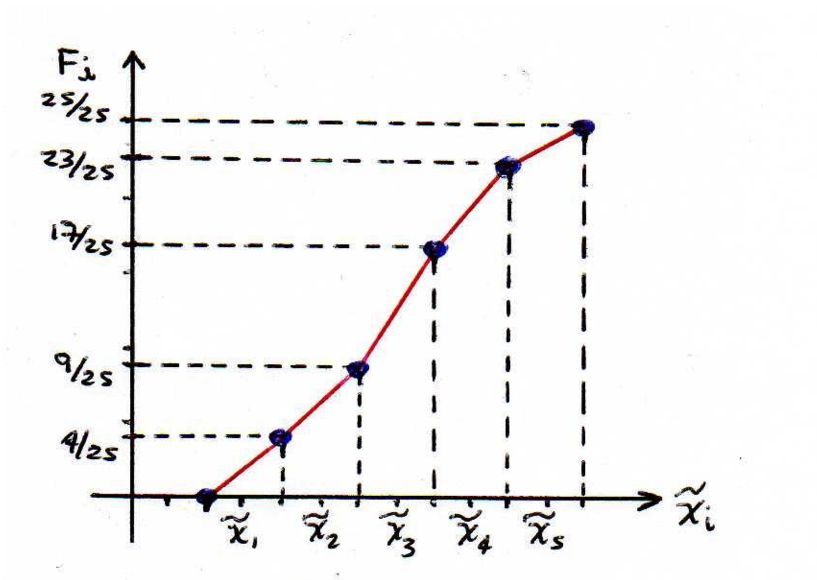
13.02	**12.94**	**12.99**	**13.07**	**12.91**
12.93	**13.06**	**13.04**	**13.05**	**12.93**
12.97	**12.98**	**13.10**	**13.06**	**12.97**
12.99	**12.90**	**13.05**	**12.98**	**13.00**
12.96	**13.01**	**12.98**	**12.96**	**13.03**

HISTOGRAMA

Cuando se trabaja con una tabla de frecuencias al conjunto de parejas (x_i , f_i^*), donde x_i es una marca de clase para el i-ésimo intervalo, constituye la distribución empírica. Esta distribución se puede representar mediante el histograma y mediante el polígono de frecuencias.



POLIGONO DE FRECUENCIAS RELATIVAS ACUMULADAS



fractil en %

fractil en 100% = 13.105

fractil en 0% = 12.895

fractil en $\underline{(17 / 25) \times 100\%}$ = 13.021
68

fractiles
- percentil (1ro , 2do , …. , 100mo)
- decil (1ro, 2do, ….. , 10mo)
- cuartil (1ro [25%] , 2do [50%] , 3ro [75%] , 4to [100%])

PARAMETROS DE LAS DISTRIBUCIONES EMPIRICAS

1. MEDIA

Es el promedio aritmético de todos los datos de la muestra:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} xi$$

Con una tabla de frecuencias

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_i f_i}{\sum_{i=1}^{m} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_i f_i}{n}$$

En el ejemplo:

$$\bar{x} = \frac{(12.916)(4) + (12.958)(5) + (13)(8) + (13.042)(6) + (13.084)(2)}{25} = 12.9949$$

$\bar{x}$ = <u>12.9949</u>

$$\bar{x} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} X_i = 12.9964 \text{ } \underline{\textbf{Exacto}}$$

<u>2. MEDIANA</u>

Es un valor tal que la mitad de las observaciones son menores que ese valor y la otra mitad mayores que el mismo. Para determinar la mediana conviene ordenar los valores observados del menor al mayor.

Ejemplos:

a) 1, 7, 8, 10, 12, 15, 17, 23, 24
Mediana = 12

b) 1, 7, 8, 10, 12, 15, 17, 23, 24, 29

$$\frac{12 + 15}{2} = 13.5 \text{ Mediana}$$

c) 4, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 8, 9, 9
Mediana = 7

Si se trabaja con intervalos de clase:

$$\text{Mediana} = a + \Delta x \left[\frac{n/2 - (\sum f)_a}{fm} \right]$$

donde en la tabla de frecuencias se trabaja en el intervalo en donde la frecuencia f_i rebasa el 50%, por primera vez, entonces:

Δx = Es el tamaño del intervalo.
a = Al extremo izquierdo del intervalo.
n = Al número de valores observados en el experimento.
f_m = A la frecuencia correspondiente al intervalo en cuestión.
$(\sum f)_a$ = A la suma de las frecuencias correspondientes a los intervalos anteriores.

En el ejemplo: se trabaja en el 3^{e} intervalo

$$\text{Mediana} = 12.979 + 0.042 \left[\frac{12.5 - (4 + 5)}{8} \right] = 12.997375$$

Mediana = 12.9974

3. MODA (O MODO)

Es el número que aparece más frecuentemente.

En el ejemplo:

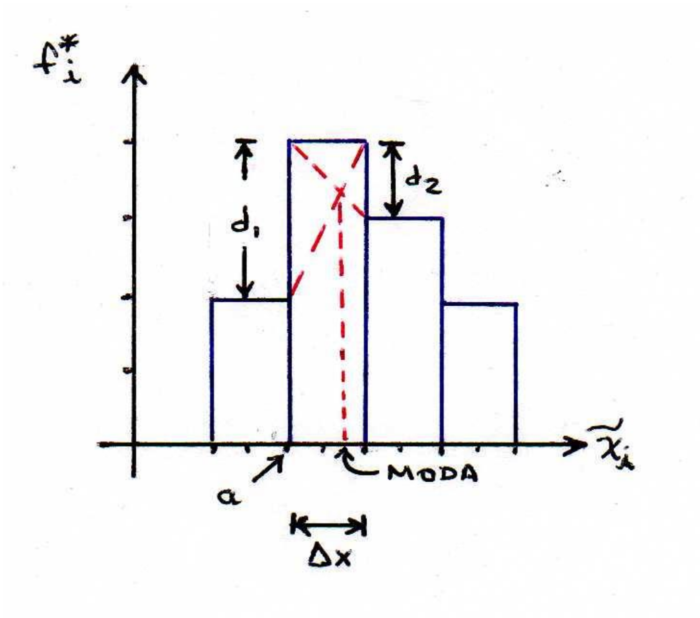
Moda = 12.98 es unimodal

si se repiten igual número de veces dos o más números se saca el promedio.

Ejemplos: con dos modas (bimodal)
con tres modas (trimodal)
“
“
“
“
con varias modas (multimodal)

Si se trabaja con una tabla.- la moda se encuentra en el intervalo que tiene mayor frecuencia.

HISTOGRAMA.



$$\text{Moda} = a + \Delta x \left[\frac{d_1}{d_2 + d_1} \right]$$

En el ejemplo: $d_1 = 3$; $d_2 = 2$

$$\text{Moda} = 12.979 + 0.042 \left[\frac{3}{3 + 2} \right]$$

Moda = <u>13.0042</u>

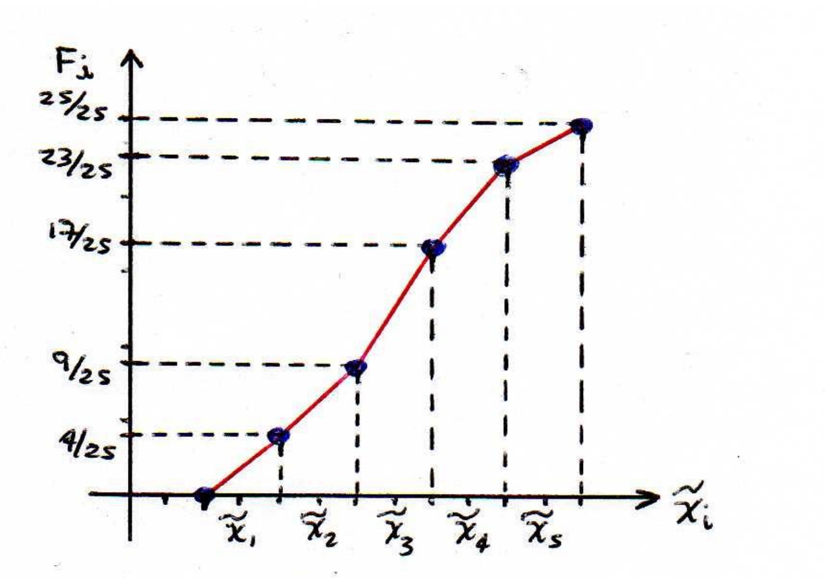
4. FRACTILES.

Establecen la localización de diversos valores que dividen a la muestra en grupos de acuerdo a las frecuencias o a las observaciones.

En una tabla:

$$\text{Fractil} = a + \Delta x \left[\frac{n \text{ x Fracción} - (\Sigma f)_a}{(f)\ \text{Fractil}} \right]$$

POLIGONO DE FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA:



Cuartiles: C_1, C_2, C_3, C_4

C_1 = Fractil al 25%

En el ejemplo:

$$C_1 = 12.937 + (0.042)\left[\frac{25\,(0.25) - 4}{5}\right] = 12.9559$$

$$C_2 = 12.979 + (0.042)\left[\frac{25\,(0.50) - 9}{\mathbf{8}}\right] = 12.997375$$

$$C_3 = 13.021 + (0.042)\left[\frac{25\,(0.75) - 17}{6}\right] = 13.03325$$

$$C_4 = 13.063 + (0.042)\left[\frac{25\,(1) - 23}{2}\right] = 13.105$$

$$d_1 = 12.895 + (0.042)\left[\frac{25\,(0.01) - 0}{4}\right] = 12.92125$$

5. VARIANCIA:

Es el promedio aritmético de los cuadrados de las desviaciones de las observaciones con respecto a su valor medio.

$$S^2_X = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Si se trabaja con una tabla:

$$S^2_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_i - \bar{x})^2 f_i}{n}$$

donde:

$\tilde{x}$ = marca de clase
k = número de intervalo
$\bar{x}_i$ = media
f_i= la frecuencia
n = número de observaciones

Para el ejemplo:

$$S_x^2 = \frac{(12.916 - 12.9952)^2 (4) + (12.958 - \bar{x})^2 (5) + \ldots\ldots + (13.084 - \bar{x})^2 (2)}{25}$$

S^2_x= <u>0.0024</u>

S_x= Desviación estándar = $\sqrt{S^2_x}$

$S_x = \sqrt{0.0024}$ = <u>0.048989794856</u>

6. COEFICIENTE DE VARIACION.

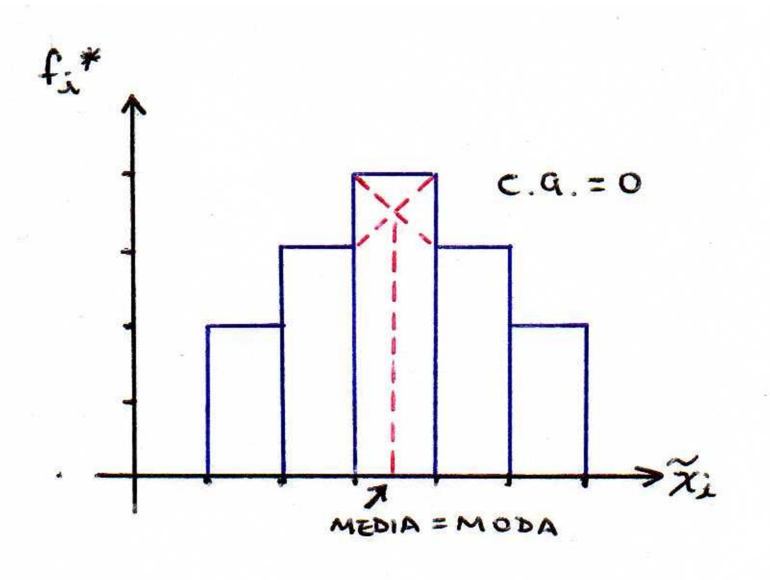
$$\mathbf{C.\ V.} = \frac{\mathbf{Sx}}{\bar{x}}$$

En el ejemplo:

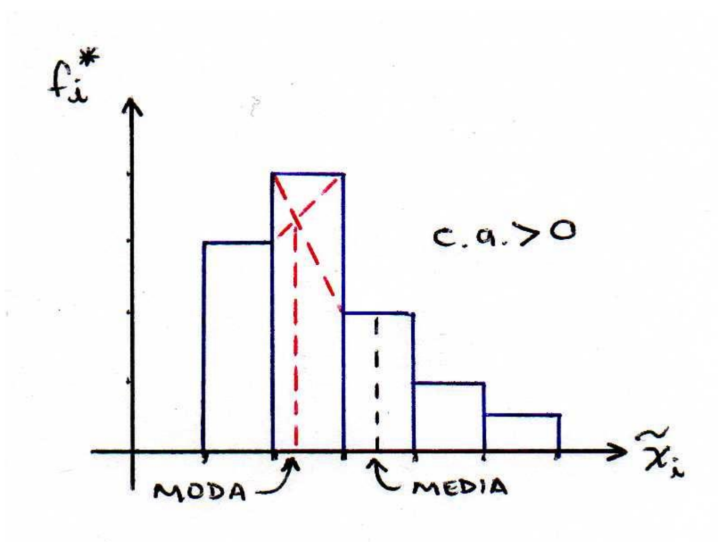
$$\textbf{C. V.=} \frac{\sqrt{0.0024}}{12.9952} = \underline{0.0037}$$

7. COEFICIENTE DE ASIMETRIA:

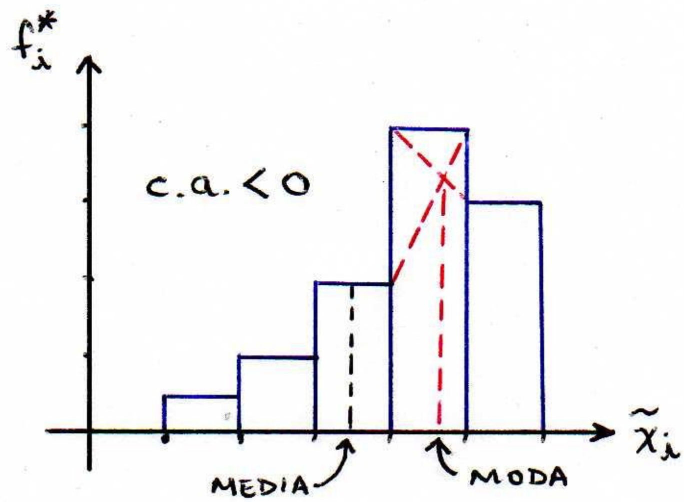
$$\text{C. A.=} \frac{\text{Media} - \text{Moda}}{S_x} = \frac{12.9952 - 13.042}{0.04898} = -0.9554$$



Distribución simétrica positiva:



Distribución simétrica negativa:



8. COEFICIENTE DE APLANAMIENTO.

El grado de aplanamiento de una distribución empírica se llama curtosis y se mide por el siguiente coeficiente.

$$\text{Coeficiente momento de curtosis} = \frac{m_4}{m_2^2}$$

donde:

m_r .- es el momento de orden r con respecto a la media.

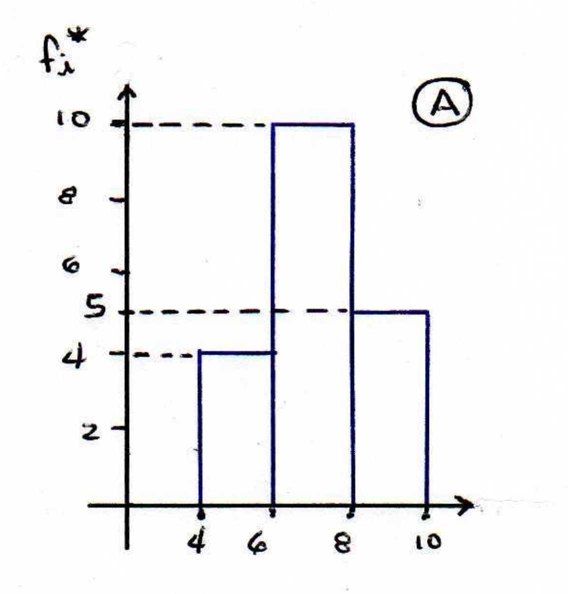
$$m_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^r}{n}$$

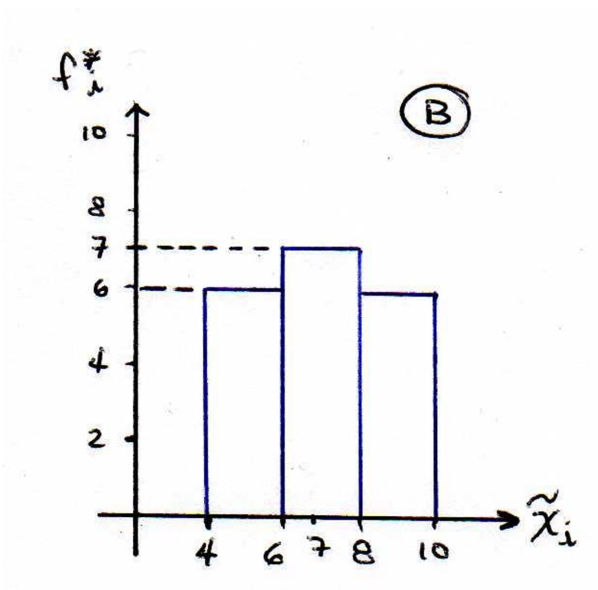
En una tabla de frecuencias

$$m_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^r f_i}{n}$$

Observar que: $m_2 = S_X^2$

SEAN LOS HISTOGRAMAS:





En A:

$$\bar{x} = \frac{5\ (4) + 7\ (10) + 9\ (5)}{19} = 7.105$$

En B:

$$\bar{x} = \frac{5\ (6) + 7\ (7) + 9\ (6)}{19} = 7$$

En A:

$$m_2 = \frac{(5-7.105)^2\,(4) + (7-7.105)^2\,(10) + (9-7.105)^2\,(5)}{19} = 1.8836566$$

$$m_4 = \frac{(5-7.105)^4\,(4) + (7-7.105)^4\,(10) + (9-7.105)^4\,(5)}{19} = 7.527$$

$$\text{Coeficiente de curtis} = \frac{m_4}{m^2{}_2} = \frac{7.527}{(1.8836)^2} = \underline{2.122}$$

En B:

$$m_2 = \frac{(5-7)^2\,(6) + (7-7)^2\,(7) + (9-7)^2\,(6)}{19} = 2.526$$

$$m_4 = \frac{(5-7)^4\,(6) + (7-7)^4\,(7) + (9-7)^4\,(6)}{19} = 10.105$$

$$\text{Coeficiente de curtis} = \frac{m_4}{m_2{}^2} = \frac{10.105}{(2.526)^2} = \underline{1.58}$$

TAREA:

Datos: 0, 45, 65, 80, 85, 80, 20, 45, 17, 73, 35, 62, 57, 45, 10, 67, 65, 42, 10, 40, 65, 48, 15, 65, 52, 75, 35, 100, 57, 65, 45, 57, 42, 48, 70, 35, 35, 42, 25, 38, 25, 80, 85, 100, 28, 25, 65, 85, 25, 35.

Son 50 calificaciones, de los alumnos del grupo 26 de probabilidad y estadística.

INTERVALOS DE CLASE	MARCAS DE CLASE	f_i	f_i^*	F_i
-0.1 - 19.94				
19.94 – 39.98				
39.98 – 60.02				
60.02 – 80.06				
80.06 – 100.1				

Valor máximo = 100

Valor mínimo = 0

$\sum f_i = 50$

Se suma y resta: 0.1

Valor máximo + 0.1 = 100 + 0.1 = 100.1

Valor mínimo – 0.1 = 0 – 0.1 = - 0.1

Rango = 100.1 – (- 0.1) = 100.2

Amplitud del intervalo = 100.2 / 5 = 20.04

$$\Delta x = \frac{100.1 + 0.1}{5} = 20.04$$

Calcular:

a) media
b) mediana
c) moda
d) fractiles C_1, C_2, C_3, C_4
e) variancia y desviación estándar
f) coeficiente de asimetría
g) coeficiente de aplanamiento
h) histograma con polígono de frecuencias
i) polígono de frecuencias relativas acumuladas
j) coeficiente de variación